

স্নাতক পাঠ্যক্রম (B.D.P.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা (Term End Examination) :

ডিসেম্বর, ২০১৫ ও জুন, ২০১৬

পদার্থবিদ্যা (Physics)

ঐচ্ছিক পাঠ্যক্রম (Elective)

প্রথম পত্র (1st Paper : Mathematical Methods in Physics)

সময় : দুই ঘন্টা

পূর্ণমান : ৫০

Time : 2 Hours

Full Marks : 50

মানের গুরুত্ব : ৭০%

Weightage of Marks : 70%

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে।
অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর
কেটে নেওয়া হবে। উপাত্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

**Special credit will be given for accuracy and relevance
in the answer. Marks will be deducted for incorrect
spelling, untidy work and illegible handwriting.**

**The weightage for each question has been
indicated in the margin.**

১। যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন : 10 × 2 = 20

ক) i) একটি বস্তুকণার স্থান ভেক্টর হল

$$\vec{r} = a \cos 2\omega t \hat{i} + a \sin 2\omega t \hat{j}$$

বস্তুকণার গতিপথটি কিরকম ? 5

ii) গোলীয় নির্দেশতন্ত্র ব্যবহার করে প্রমাণ করুন যে,

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0. \quad 5$$

B.Sc.-7055-B

[P.T.O.

খ) i) গোলীয় নির্দেশতন্ত্রে $\frac{\partial}{\partial x}$ -এর মান নির্ণয় করুন।

ii) নীচের অবকল রাশিটি যথার্থ কিনা বিচার করুন :

$$d\phi = (x^2 - y) dx + x dy.$$

iii) $x = 0$ বিন্দুতে নীচের অবকল সমীকরণটি বিশিষ্ট
(singular) কিনা দেখুন এবং যদি বিশিষ্ট হয়
তবে তার বিশিষ্টতা কি ধরনের তা নির্ণয় করুন।

$$x^3 \frac{d^2 y}{dx^2} - 6y = 0. \quad 3 + 3 + (3 + 1)$$

গ) i) u চররাশিটি যদি কেবলমাত্র r -এর ওপর নির্ভর
করে তবে দেখান যে

$$\nabla^2 u = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr}. \quad 5$$

ii) নীচের অবকল সমীকরণটি চররাশির প্রতিস্থাপনীয়
পদ্ধতিতে সমাধান করুন :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

দেওয়া আছে

$$v = 0, \text{ যখন } y = 0 \text{ এবং } y = 5$$

$$v = v_0, \text{ যখন } x = 1 \text{ এবং}$$

$$v(-x, y) = v(x, y). \quad 5$$

B.Sc.-7055-B

- ঘ) i) $f(x)$ অপেক্ষকটিকে Fourier শ্রেণীর সাহায্যে বিস্তৃত করুন।

$$f(x) = x^2 \text{ যখন } -\pi \leq x \leq \pi$$

এই বিস্তৃতির সাহায্যে দেখান যে

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad 4 + 2$$

- ii) একটি বস্তুকণা $x = 2t^2$, $y = t^2 - 4t$ এবং $z = 3t - 5$ পথ বরাবর চলছে।

$\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $t = 1$ -এ বস্তুকণার গতিবেগের উপাংশ নির্ণয় করুন। 4

- ঙ) i) $x^2 + y^2 = 9$ বেলন এবং $z = 0$ এবং $z = 2$ সমতলদ্বয় দ্বারা যে আবদ্ধ তল হয় তার মধ্যে দিয়ে $\vec{A} = xy^2\hat{i} + y^3\hat{j} + y^2z\hat{k}$ ভেক্টর ক্ষেত্রের ফ্লাক্স নির্ণয় করুন। 6

- ii) দেখান যে $2 - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \dots$ শ্রেণীটি একটি oscillating শ্রেণী। 4

- চ) i) সম্ভূত এবং অসম্ভূত আবন্টনের জন্য $E(X)$ -এর সংজ্ঞা দিন।

- ii) দেখান যে $\text{var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

- iii) Maxwell's-এর গতি আবন্টন সূত্রের ক্ষেত্রে $\text{var}(x)$ নির্ণয় করুন। 2 + 4 + 4

2. যে কোন তিনটি প্রশ্নের উত্তর দিন : $6 \times 3 = 18$

- ক) চররাশির প্রতিস্থাপনীয় পদ্ধতির সাহায্যে নীচের অবকল সমীকরণটির সমাধান করুন :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = h^2 \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u = u(x, t) \text{ এবং } h = \text{ধ্রুবক।}$$

দেওয়া আছে $x = 0$ এবং $x = L$ হলে $u = 0$ । 6

- খ) প্রমাণ করুন যে

$$\vec{A} = (y + \sin z)\hat{i} + x\hat{j} + x \cos z\hat{k}$$

একটি সংরক্ষী ভেক্টর। এই ভেক্টরের বিভব নির্ণয় করুন।

3 + 3

- গ) i) প্রমাণ করুন যে সাধারণ ঘূর্ণন ভেক্টর নয় কিন্তু অণুপরিমাণ (infinitesimal) ঘূর্ণন একটি ভেক্টর। 4

- ii) $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ হলে সর্বদাই কি $\vec{A} = \vec{B}$ হবে? 2

- ঘ) সমাকল গুণকের সাহায্যে নীচের অবকল সমীকরণটির সমাধান করুন :

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E_0 \sin pt \quad (L, R, E_0, p \text{ ধ্রুবক}) \quad 6$$

- ঙ) Gauss-এর উপপাদ্যের সাহায্যে অথবা অন্যভাবে প্রমাণ করুন :

$$\int_V \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) dv = -4\pi. \quad 6$$

চ) পরীক্ষাগারে কোন ছাত্র একটি কাচের ফলকের নিম্নলিখিত দৈর্ঘ্যগুলি নির্ণয় করেছে (cm এককে) :

7.0, 6.9, 7.4, 7.0, 6.9, 7.2, 7.1, 6.7, 7.0, 6.8

পরীক্ষা নিরূপণের প্রমাণ ত্রুটি নির্ণয় করুন। 6

3. যে কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন : $3 \times 4 = 12$

ক) দেখান যে,

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad 3$$

খ) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$ রাশিটির মান নির্ণয় করুন। 3

গ) $\vec{A}$ পোলার ভেক্টর এবং $\vec{B}$ অক্ষীয় ভেক্টর হলে $\vec{A} \times \vec{B}$ কি ধরনের ভেক্টর? 3

ঘ) $f(x)$ একটি পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক যার পর্যায়কাল T ।
দেখান যে

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_b^{b+T} f(x) dx. \quad 3$$

ঙ) $f(x) = \tan x$ কে কি Fourier শ্রেণীর সাহায্যে লেখা যায়? 3

চ) যদি $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 3$ হয় তবে $\vec{A}$ -এর মান নির্দিষ্ট নয়। 3

ছ) নীচের অবকল সমীকরণটির সমাধান করুন :

$$x\sqrt{1-y^2} dx + y\sqrt{1-x^2} dy = 0. \quad 3$$

জ) তিনটি এক টাকার কয়েনকে একসঙ্গে টস করা হল।

সবগুলিই হেড পড়ার সম্ভাব্যতা কত? 3

(English Version)

1. Answer any *two* questions : $10 \times 2 = 20$

- a) i) The position vector of a particle is given by

$$\vec{r} = a \cos 2\omega t \hat{i} + a \sin 2\omega t \hat{j}$$

What is the trajectory of the particle ?

5

- ii) Using spherical polar co-ordinates show that

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0.$$

5

- b) i) Calculate $\frac{\partial}{\partial x}$ in spherical polar co-ordinate system.

- ii) Find whether the following $d\phi$ is an exact differential.

$$d\phi = (x^2 - y) dx + x dy.$$

- iii) Check the singularity of the following equation at $x = 0$ and state the type of the singularity.

$$x^3 \frac{d^2 y}{dx^2} - 6y = 0. \quad 3 + 3 + (3 + 1)$$

- c) i) If u is a function of r only then show that

$$\nabla^2 u = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr}. \quad 5$$

- ii) Solve the following equation by separation of variable method :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Given that

$$v = 0, \text{ when } y = 0 \text{ and } y = 5$$

$$v = v_0 \text{ when } x = 1 \text{ and}$$

$$v(-x, y) = v(x, y). \quad 5$$

- d) i) Find the Fourier series expansion for the function $f(x)$ defined by

$$f(x) = x^2, \quad -\pi \leq x \leq \pi \text{ and hence}$$

show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad 4 + 2$$

- ii) A particle moves along a curve

$$x = 2t^2, \quad y = t^2 - 4t \text{ and } z = 3t - 5.$$

Find the velocity component at $t = 1$

$$\text{in the direction } \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}. \quad 4$$

- e) i) Find the flux of a vector field
 $\vec{A} = xy^2 \hat{i} + y^3 \hat{j} + y^2 z \hat{k}$ through the
 closed surface formed by the cylinder
 $x^2 + y^2 = 9$ and planes $z = 0$ and
 $z = 2$. 6
- ii) Show that
 $2 - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \dots$
 is an oscillating series. 4
- f) i) Define $E(X)$ both for continuous
 and discrete distribution.
- ii) Show that
 $var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.
- iii) Calculate $var(x)$ for Maxwell's
 velocity distribution. 2 + 4 + 4
2. Answer any *three* questions : 6 × 3 = 18
- a) Solve the following differential equation
 using separation of variables technique :
 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = h^2 \frac{\partial u}{\partial t}$, where $u = u(x, t)$ and h is a
 constant. Given that $u = 0$ at $x = 0$ and
 $x = L$. 6
- b) Prove that
 $\vec{A} = (y + \sin z) \hat{i} + x \hat{j} + x \cos z \hat{k}$
 is a conservative vector. Find the
 corresponding potential. 3 + 3

- c) i) Prove that finite rotation cannot be
 represented as a vector but
 infinitesimal rotation can be
 represented as a vector. 4
- ii) If $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B}$, does it mean that $\vec{A}$
 always equal to $\vec{B}$? 2
- d) Solve the following differential equation by
 finding a suitable integrating factor.
 $L \frac{dI}{dt} + RI = E_0 \sin pt$
 (L, R, E_0 & p are all constants) 6
- e) Prove by Gauss' theorem or otherwise
 $\int_v \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) dv = -4\pi$. 6
- f) In a Laboratory a student measures
 following lengths of a glass slab (in cm).
 7.0, 6.9, 7.4, 7.0, 6.9, 7.2, 7.1, 6.7, 7.0, 6.8
 Find the standard error of the
 measurement. 6
3. Answer any *four* questions : 3 × 4 = 12
- a) Show that
 $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. 3

b) Evaluate $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$. 3

c) $\vec{A}$ is a polar vector and $\vec{B}$ is an axial vector. What is the nature of $\vec{A} \times \vec{B}$? 3

d) $f(x)$ is a periodic function with time period T . Show that

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_b^{b+T} f(x) dx. \quad 3$$

e) Can $f(x) = \tan x$ be expanded in Fourier series? 3

f) Show that if $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 3$ then the vector $\vec{A}$ is not unique. 3

g) Solve the following differential equation :
 $x\sqrt{1-y^2} dx + y\sqrt{1-x^2} dy = 0.$ 3

h) Three one rupee coins have been tossed up simultaneously. What is the probability that all the results show heads? 3

=====