স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা (Term End Examination) :

ডিসেম্বর, ২০১৫ ও জুন, ২০১৬

গণিত (Mathematics)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম (Elective)

দশম পত্র (10th Paper : **Analytical Statics and Fluid Statics**)

সময় ঃ দুই ঘণ্টা — পূর্ণমান ঃ ৫০

Time : 2 Hours — Full Marks : 50

(মানের গুরুত্ব ঃ ৭০%)

(Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

১। প্রত্যেক বিভাগ থেকে একটি করে নিয়ে মোট **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

বিভাগ – অ

(ক) একটি সমতলীয় বলগোষ্ঠী $\vec{P_1}, \vec{P_2}, \ldots, \vec{P_n}$ যথাক্রমে একটি দৃঢ় বস্তুর $A_1(\vec{r_1}), A_2(\vec{r_2}), \ldots, A_n(\vec{r_n})$ বিন্দুতে ক্রিয়া করে, যেখানে ঐ তলের O বিন্দুর সাপেক্ষে

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ বিন্দুগুলির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \ldots, \vec{r_n}$। দেখান যে, বলগোষ্ঠীটি O বিন্দুতে একটি বল $\vec{R}$ এবং একটি ভ্রামক $\vec{G} = \sum_{k=1}^{n} \vec{r_k} \times \vec{P_k}$ -এর সঙ্গে সমতুল। এর থেকে দেখান যে, (i) যদি $\sum_{k=1}^{n} \vec{P_k} \neq \vec{O}$, তাহলে বলগোষ্ঠীটি একটি বলের সমতুল; এবং (ii) যদি $\sum_{k=1}^{n} \vec{P_k} = \vec{O}$, তাহলে বলগোষ্ঠীটি একটি ভ্রামকের সমতুল। 10

(খ) একটি সুষম অপ্রসার্য ভারী সূত্র দুটি বিন্দু থেকে একটি উল্লম্ব তলে অভিকর্ষের অধীনে সাম্যাবস্থায় ঝুলছে। ধরা যাক উপযুক্ত অক্ষ নিলে সূত্র দ্বারা গঠিত বক্ররেখার সমীকরণ $y = f(x)$। দেখান যে, y নিম্নে প্রদত্ত সমীকরণ সিদ্ধ করবে $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{c}\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{1/2}$, যেখানে c একটি প্রচল। উপযুক্ত শর্ত ধরে, এই সমীকরণটি সমাধান করে দেখান যে, বক্ররেখার সমীকরণ $y = c\cosh(x/c)$। 10

বিভাগ – আ

(গ) ρ ঘনত্ব বিশিষ্ট তরলের মধ্যে একটি সামতলিক ক্ষেত্র সম্পূর্ণভাবে নিমজ্জিত অবস্থায় অভিকর্ষের অধীনে সাম্যাবস্থায় আছে। ক্ষেত্রটির চাপকেন্দ্রের গভীরতা বের করুন এবং দেখান যে, এটি ভারকেন্দ্রের গভীরতার থেকে বড়।

এর থেকে দেখান যে, ক্ষেত্রটি সমবেগে নিম্নগামী হলে, চাপকেন্দ্র, ভারকেন্দ্রগামী অনুভূমিক রেখার দিকে সমবেগে ধাবমান এবং ঐ বেগ ভারকেন্দ্রের গভীরতার বর্গের ব্যস্তানুপাতী। 10

(ঘ) কার্তেসীয় অক্ষের সমান্তরাল দিকে (X, Y, Z) উপাংশ বিশিষ্ট একটি বল $\vec{P}$-এর অধীনে ρ ঘনত্ব বিশিষ্ট একটি তরল সাম্যাবস্থায় আছে। দেখান যে, সাম্যের আবশ্যক শর্ত হবে

$$X\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right)+Y\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right)+Z\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)=0.$$

আরও দেখান যে, সংরক্ষী বলক্ষেত্রের প্রভাবে, একটি অসমসত্ত্ব তরলের সমচাপের তল, সমঘনত্বের তল এবং সমবিভবের তল অভিন্ন। 10

২। প্রত্যেক বিভাগ থেকে অন্তত একটি প্রশ্ন নির্বাচন করে যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

বিভাগ – অ

(ক) X, Y, Z বল যথাক্রমে তিনটি সরলরেখা $y=b$, $z=-c$; $z=c$, $x=-a$; $x=a$, $y=-b$ বরাবর ক্রিয়া করে। দেখান যে, তাদের একটি লব্ধি বল থাকবে যদি $\frac{a}{X}+\frac{b}{Y}+\frac{c}{Z}=0$ হয়। লব্ধি বলের ক্রিয়ারেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

(খ) সমান ওজন W বিশিষ্ট চারটি দণ্ড মসৃণভাবে যুক্ত হয়ে একটি রম্বস $ABCD$ গঠন করে। এই গঠনটি A বিন্দু থেকে ঝুলছে এবং একটি ভার W', C বিন্দুতে যুক্ত। একটি উপেক্ষণীয় ভরের কঠিন দণ্ড দ্বারা AB এবং AD-র মধ্যবিন্দু দুটি সংযুক্ত আছে, যাতে তারা AC-র সঙ্গে α কোণে নত থাকে। দেখান যে, কঠিন দণ্ডটির উপর ঘাত $(4W+2W')\tan\alpha$ ।

(গ) একটি বর্গক্ষেত্রাকার অংশ একটি বৃত্তাকার ফলক থেকে একটি ব্যাসার্ধকে কর্ণ করে কেটে নেওয়া হল। দেখান যে, অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্র, কেন্দ্র থেকে $\frac{a}{8\pi-4}$ দূরে অবস্থিত, যেখানে a হল বৃত্তটির ব্যাস।

বিভাগ – আ

(ঘ) উল্লম্ব তলে রক্ষিত, একটি সমপ্রস্থচ্ছেদ বিশিষ্ট ছোট বৃত্তাকার টিউবের মধ্যে ρ এবং $\sigma(\rho>\sigma)$ ঘনত্বের এবং মিশ্রিত হয় না এরকম দুটি তরল সম পরিমাণে আছে। তারা একসাথে যদি টিউবের অর্ধেক পূর্ণ করে, তবে দেখান যে, তাদের সাধারণ তলের মধ্য দিয়ে যাওয়া ব্যাসার্ধ উল্লম্বের সাথে $\tan^{-1}\frac{\rho-\sigma}{\rho+\sigma}$ কোণ উৎপন্ন করে।

(ঙ) কোন তলের একটি স্থির বিন্দুর দিকে, দূরত্বের সাথে পরিবর্তনশীল এরূপ বল প্রয়োগের ফলে, কিছু পরিমাণ তরল ঐ নির্দিষ্ট তলের উপর স্থির আছে। মুক্ত তলটি অর্ধগোলকাকার হলে তলটির উপর ঘাত নির্ণয় করুন।

(চ) ρ ঘনত্বের ত্রিভুজাকৃতি পাত ABC, σ ঘনত্বের তরলে উল্লম্বভাবে ভাসমান আছে, যাতে B বিন্দুটি তরলের উপরিতলে থাকে এবং A বিন্দুটি তরলে নিমজ্জিত না হয়। দেখান যে, $\rho : \sigma = \sin A \cos C : \sin B$.

৩। প্রত্যেক বিভাগ থেকে দুটি করে নিয়ে মোট **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

বিভাগ – অ

(ক) কোন বস্তুর $A_1, A_2, \ldots, A_n$ বিন্দুতে ক্রিয়াশীল n-সংখ্যক সমতলীয় বল $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \ldots, \vec{F_n}$ সাম্যাবস্থায় আছে। তাদের নিরপেক্ষ (Astatic) সাম্যের শর্তটি বের করুন।

(খ) ABC ত্রিভুজের A, B, C শীর্ষত্রয়ে সক্রিয় P, Q, R বল তিনটির প্রত্যেকটি ঐ শীর্ষত্রয়ের বিপরীত বাহুর উপর যথাক্রমে লম্বভাবে থেকে ত্রিভুজটিকে সাম্যাবস্থায় রাখে। প্রমাণ করুন যে, $P : Q : R = a : b : c.$

(গ) একটি শক্ত অর্ধগোলক একটি সমব্যাসার্ধযুক্ত স্থির গোলকের উপর বক্রতলের সাথে সাম্যাবস্থায় স্থির আছে। দেখান যে, সাম্যাবস্থাটি সুস্থিতিহীন।

(ঘ) ব্যাখ্যা করুন — 'ঘর্ষণ কোণ' ও 'ঘর্ষণ শঙ্কু'।

বিভাগ – আ

(ঙ) (i) ভাসমান বস্তুর তল, (ii) ভাসমান বস্তুর সমগ্র তল এবং (iii) প্লবতার সমগ্র তল বলতে কি বোঝানো হয় ?

(চ) অভিকর্ষ ত্বরণ g ধ্রুবক হলে, z উচ্চতায় সমোষ্ণ বায়ুমণ্ডলের চাপ বের করুন।

(ছ) জল দ্বারা ভর্তি একটি অর্ধগোলকাকার বাটি, অনুভূমিক অবস্থায় রাখা আছে। দেখান যে, বাটির উপর লব্ধি ঘাত, উল্লম্ব ব্যাসগামী তলের একদিকের উপর অনুভূমিক ঘাতের π গুণ হবে।

(জ) a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি সরু বৃত্তাকার টিউব, সেটির পরিধির অর্ধেক পরিমাণ তরল দ্বারা ভর্তি আছে। সেটি উল্লম্ব ব্যাসের চারদিকে সমকৌণিক বেগে ঘুরতে পারে। প্রমাণ করুন, কৌণিক বেগ $\sqrt{\frac{2g}{a}}$ -এর জন্য তরলটি সবেমাত্র (just) দুভাগে বিভক্ত হয়।

(English Version)

1. Answer any *two* questions taking *one* from each Group : 10 × 2 = 20

Group – A

(a) A system of coplanar forces $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n$ are acting on a rigid body at points $A_1(\vec{r}_1), A_2(\vec{r}_2), \ldots, A_n(\vec{r}_n)$ respectively, where $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$ are the position vectors of $A_1, A_2, \ldots, A_n$ with respect to a point O in the plane of the force. Show that the system can be reduced to a single force $\vec{R}$ at O together with a couple $\vec{G} = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{P}_k$.

Hence show that (i) if $\sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k \neq \vec{O}$, then the system reduces to a single force only; and (ii) if $\sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k = \vec{O}$, the system reduces to a couple only. 10

(b) A heavy uniform inextensible string is suspended from two given points and is in equilibrium in a vertical plane under the action of gravity. Supposing that the equation to the curve can be put in the form $y = f(x)$ with a proper choice of axes, show that y satisfies the equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{c}\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{1/2},$$

where c is a parameter.

Solve this equation with appropriate conditions to show that the equation to the curve is $y = c\cosh(x/c)$. 10

Group – B

(c) A plane area, completely immersed in a liquid of density ρ, is in equilibrium under gravity. Find the depth of the centre of pressure of the area and show that it is greater than the depth of the centre of gravity.

Hence show that if the plane is lowered uniformly, then the C.P. approaches to the horizontal through C.G. with uniform velocity which is inversely proportional to the square of the depth of C.G. 10

(d) A fluid of density ρ is in equilibrium under a force $\vec{P}$ whose components are (X, Y, Z) parallel to a set of Cartesian axes. Show that the necessary condition of equilibrium is

$$X\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right)+Y\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right)+Z\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)=0.$$

Show also that for a heterogeneous fluid under conservative field of forces, the surfaces of equipressure, of equidensity and of equal potential energy coincide. 10

2. Answer any *three* questions taking at least *one* from each Group : 6 × 3 = 18

Group – A

(a) Forces X, Y, Z act along the three straight lines $y=b$, $z=-c$; $z=c$, $x=-a$; $x=a$, $y=-b$ respectively. Show that they will have a single resultant if $\frac{a}{X}+\frac{b}{Y}+\frac{c}{Z}=0$. Find the equation of the line of action of the resultant.

(b) Four equal rods each of weight W form a rhombus $ABCD$ with smooth hinges at the joints. The frame is suspended by the end A and a weight W' is attached to C. A stiffening rod of negligible weight joins the middle points of AB, AD keeping these

inclined at an angle α to AC. Show that the thrust in the stiffening rod is $(4W+2W')\tan\alpha$.

(c) A square hole is punched out of a circular lamina, the diagonal of the square being a radius of the circle. Show that the centre of gravity of the remainder is at a distance $\frac{a}{8\pi-4}$ from the centre of the circle whose diameter is a.

Group – B

(d) A small uniform circular tube, whose plane is vertical contains equal quantities of fluids whose densities are ρ and $\sigma(\rho>\sigma)$, and do not mix. If they together fill half the tube, show that the radius passing through the common surface makes with the vertical an angle $\tan^{-1}\frac{\rho-\sigma}{\rho+\sigma}$.

(e) A given volume of liquid is at rest on a fixed plane under the action of a force, to a fixed point in the plane varying as the distance. If the free surface be hemispherical, find the thrust on the plane.

(f) A triangular lamina ABC of density ρ floats in a liquid of density σ, with the plane vertical, the point B being in the surface of the liquid and the point A not immersed. Show that $\rho:\sigma=\sin A\cos C:\sin B$.

3. Answer any *four* questions taking *two* from each Group : 3 × 4 = 12

Group – A

(a) A number (n) of coplanar forces $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \ldots, \vec{F_n}$ acting at $A_1, A_2, \ldots, A_n$ of a body are in equilibrium. Find the condition for their Astatic equilibrium.

(b) Three forces *P, Q, R* acting at the vertices *A, B, C* along the perpendicular to the opposite sides respectively of the triangle *ABC*, keep it in equilibrium. Show that $P : Q : R = a : b : c$.

(c) A solid hemisphere rests in equilibrium with the curved surface on a fixed sphere of same radius. Show that the equilibrium is unstable.

(d) Explain 'Angle of friction' and 'Cone of friction'.

Group – B

(e) What are meant by (i) Plane of floatation, (ii) Surface of floatation and (iii) Surface of buoyancy ?

(f) Find the pressure in an isothermal atmosphere at a height z when acceleration due to gravity g is constant.

(g) A hemispherical bowl is filled with water and is kept with its base horizontal. Show that the resultant thrust on the bowl is π times the horizontal thrust on the portion on one side of a vertical diametrical plane.

(h) A thin circular tube of radius a contains liquid, filling half of its circumference, and turns about the vertical diameter with uniform angular velocity. Prove that the liquid will just separate, if the angular velocity is $\sqrt{\frac{2g}{a}}$.