স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা (Term End Examination) :

ডিসেম্বর, ২০১৫ ও জুন, ২০১৬

গণিত (Mathematics)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম (Elective)

ষষ্ঠ পত্র (6th Paper : **Analytical Geometry**)

সময় ঃ দুই ঘণ্টা | পূর্ণমান ঃ ৫০

Time : 2 Hours | Full Marks : 50

(মানের গুরুত্ব ঃ ৭০%)

(Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ — ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। (ক) যদি $x^2 - 2pxy - y^2 = 0$ এবং $x^2 - 2qxy - y^2 = 0$ যুগ্ম সরলরেখা দুটি একে অপরের মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডক হয় তাহলে প্রমাণ করুন যে $pq + 1 = 0$. ৫

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

(খ) দেখান যে, $lx + my + n = 0$ সরলরেখার $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের স্পর্শক হবার শর্ত হল $a^2l^2 + b^2m^2 = n^2$. ৫

২। (ক) যদি PSP' ও QSQ' একটি কণিকের পরস্পর লম্ব দুটি নাভিগামী জ্যা হয়, তবে প্রমাণ করুন যে $\frac{1}{SP.SP'} + \frac{1}{SQ.SQ'}$ = একটি ধ্রুবক। ৫

(খ) $7x^2 - 2xy + 7y^2 - 16x + 16y - 8 = 0$ সমীকরণটিকে আদর্শাকারে পরিবর্তিত করুন এবং কণিকটির প্রকৃতি নির্দেশ করুন। ৫

৩। (ক) প্রমাণ করুন যে, ঘূর্ণনের পরিপ্রেক্ষিতে স্থানাঙ্কের রূপান্তরের ফলে দুটি সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণের মান অপরিবর্তিত থাকে। ৪

(খ) একটি সমতলের সমীকরণ নির্ণয় করুন যা $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $x = 0$ সরলরেখাটিকে ধারণ করে এবং $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 1$, $y = 0$ সরলরেখার সঙ্গে সমান্তরাল। ঐ সরলরেখা দুটির মধ্যেকার সর্বনিম্ন দূরত্ব $2d$ হলে, প্রমাণ করুন যে $\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$. ৬

৪। (ক) যে গোলকটি (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) বিন্দুগামী এবং যা $2x+2y-z=15$ সমতলটিকে স্পর্শ করে তার সমীকরণ নির্ণয় করুন। ৫

(খ) $5yz-8zx-3xy=0$ শঙ্কুটির তিনটি পরস্পর লম্ব কারিকা রেখার একটির সমীকরণ $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ হলে অপর দুটির সমীকরণ নির্ণয় করুন। ৫

বিভাগ — খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। প্রমাণ করুন যে $ax^2+2hxy+by^2=0$ সরলরেখা দুটি এবং $px+qy+1=0$ সরলরেখাটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজটি সমবাহু ত্রিভুজ হবে যদি $(3a+b)(a+3b)-4h^2=0$ এবং $h(p^2-q^2)-(a-b)pq=0$ হয়।

৬। প্রমাণ করুন যে $x^2-3xy+y^2+10x-10y+21=0$ সমীকরণটি একটি পরাবৃত্ত যার কেন্দ্র $(-2,2)$.

৭। $16x^2-9y^2=144$ পরাবৃত্তের $x=2y$ ব্যাসের অনুবন্ধী ব্যাসের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

৮। $3x^2+5y^2+3z^2+2yz+2zx+2xy-4x-8z+5=0$ সমীকরণটিকে স্বভাবী আকারে রূপান্তর করুন এবং সমীকরণটি দ্বারা কি প্রকার কোয়াড্রিক সূচিত হয় তা নির্ণয় করুন।

৯। A (2, 4, 6) ও B (4, 0, 8) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের উপর P (4, 3, 8) বিন্দু থেকে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

১০। যদি $r^2=\frac{b^2}{1-e^2\cos^2\theta}$ উপবৃত্তের r_1 ও r_2 পরস্পর লম্ব দূরক হয়, তাহলে প্রমাণ করুন যে $\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$.

বিভাগ — গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

১১। $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের মেরু সমীকরণ নির্ণয় করুন যদি মেরু (pole) কেন্দ্রতে অবস্থিত এবং মেরু অক্ষ ধনাত্মক x-অক্ষ বরাবর হয়।

১২। যদি $2x^2 - 5xy + 3y^2 - 2x + 3y = 0$ সমীকরণটি একটি যুগ্ম সরলরেখা নির্দেশ করে, তবে মূলবিন্দু থেকে ঐ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় করুন।

১৩। একটি বৃত্ত (1, 5) বিন্দুগামী এবং $2x - 3y = 5$ সরলরেখাকে (1, –1) বিন্দুতে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

১৪। দেখান যে $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের θ ও $\frac{\pi}{2} + \theta$ বিন্দুতে স্পর্শক দুটির ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ $\frac{2x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

১৫। যে গোলকটির জন্য $x^2 + y^2 + z^2 + 7y - 2z + 2 = 0$, $2x + 3y + 4z = 8$ বৃত্তটি একটি গুরুবৃত্ত তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

১৬। দেখান যে $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ পরাবৃত্তকের যে কারিকা রেখাগুলি $z = 0$ তলকে ছেদ করে, তারা পরস্পর লম্ব হবে।

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

১৭। $3x^2 - 2y^2 - 12x - 12y - 6z = 0$ কণিকয়েডটির প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

১৮। $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ এবং $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে ন্যূনতম দূরত্ব নির্ণয় করুন।

(English Version)

Group – A

Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

1. a) If the pairs of straight lines $x^2 - 2pxy - y^2 = 0$ and $x^2 - 2qxy - y^2 = 0$ bisect the angles between each other, then prove that $pq + 1 = 0$. 5

   b) Show that the condition that the straight line $lx + my + n = 0$ will touch $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ is $a^2l^2 + b^2m^2 = n^2$. 5

2. a) If the focal chords PSP' and QSQ' of a conic be perpendicular to each other, then prove that $\frac{1}{SP.SP'} + \frac{1}{SQ.SQ'}$ = a constant. 5

   b) Find the canonical form of $7x^2 - 2xy + 7y^2 - 16x + 16y - 8 = 0$ and determine its nature. 5

3. a) Prove that the angle between two straight lines remains same due to change of coordinates for rotation of axes. 4

   b) Find the equation of a plane which contains the straight line $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, x = 0 and parallel to the straight line $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 1$, y = 0. If $2d$ be the shortest distance between the straight lines, then show that $\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$. 6

4. a) Find the equation of the sphere which passes through the points (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) and touches the plane $2x + 2y - z = 15$. 5

   b) If the equation of one of the three generators of the cone $5yz - 8zx - 3xy = 0$ be $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$, find the equations of the remaining two generators. 5

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. Show that the triangle bounded by the straight line $px + qy + 1 = 0$ and the pair of straight lines $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ will be equilateral if $(3a + b)(a + 3b) - 4h^2 = 0$ and $h(p^2 - q^2) - (a - b)pq = 0$.

6. Prove that $x^2 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 21 = 0$ represents a hyperbola with $(-2, 2)$ as centre.

7. Find the conjugate diameter of the diameter $x = 2y$ of the hyperbola $16x^2 - 9y^2 = 144$.

8. Transform the equation

$$3x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2yz + 2zx + 2xy - 4x - 8z + 5 = 0$$

to its canonical form and find the nature of the quadric represented by it.

9. Find the coordinates of the foot of the perpendicular from the point P (4, 3, 8) on the line joining the points A (2, 4, 6) and B (4, 0, 8).

10. If r_1 and r_2 be the perpendicular radius vectors of the ellipse $r^2 = \dfrac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 \theta}$, then prove that $\dfrac{1}{r_1^2} + \dfrac{1}{r_2^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$.

Group – C

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. Find the polar equation of the ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, given that the pole is on the centre of the ellipse and the polar axis is along positive x-axis.

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

12. Find the distance of the point of intersection of the straight lines represented by $2x^2 - 5xy + 3y^2 - 2x + 3y = 0$ from the origin.

13. Find the equation of the circle which passes through the point (1, 5) and touches the straight line $2x - 3y = 5$ at the point (1, –1).

14. Show that the locus of the point of intersection of the tangents to the hyperbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ at the points θ and $\dfrac{\pi}{2} + \theta$ is given by $\dfrac{2x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

15. If $x^2 + y^2 + z^2 + 7y - 2z + 2 = 0$, $2x + 3y + 4z = 8$ is a great circle of a sphere, determine the equation of the sphere.

16. Prove that the generators of the hyperboloid $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ which intersects the plane $z = 0$ will be perpendicular to each other.

17. Find the nature of the conicoid $3x^2 - 2y^2 - 12x - 12y - 6z = 0$.

18. Find the shortest distance between the lines $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ and $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$.

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য